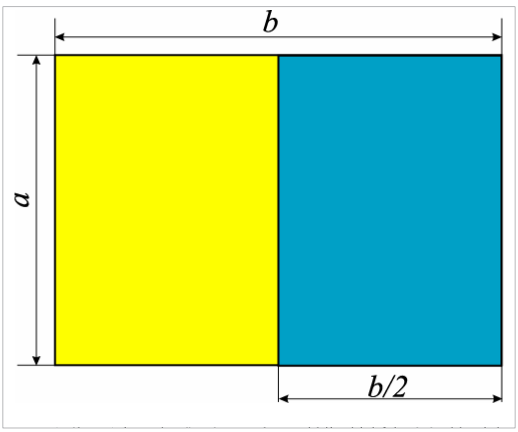
Számtan, mértan, origami és a szabványos papírméretek

A papír gyártása, forgalmazása és feldolgozása során szabványos alakokat használunk. Ezeket a méreteket a szakirodalmak tartalmazzák. Az alábbiakban néhány érdekességet és összefüggést mutatok be:

1. A szerepe

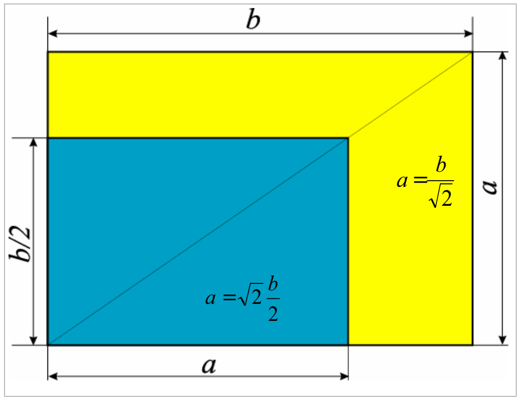
Az „A" és a „B" méretsorozatra az jellemző, hogy a hosszabbik oldal felezésével – vágással vagy hajtogatással – hasonló téglalapot kapunk (*a*:*b* = *b*/2). A hasonlóság azt jelenti, hogy az oldalak aránya megegyezik, tehát a rövidebb oldal *(a)* úgy aránylik a hosszabbik oldalhoz *(b)*, mint a hosszabbik oldal felezésével kapott rövidebb oldal *(b/2)* aránylik a hosszabbik oldalhoz *(a)*. Az első ábrán világosan látható, hogy a *b*/2×*a* ív területe fele akkora, mint az *a*×*b* kiinduló méretéé.



***1. ábra.** A következő méretet a hosszabbik oldal felezésével kapjuk*

A hasonlóságot a második ábrán a téglalapok közös átlójával ábrázoljuk.

A két ábra érdekes összefüggésekre mutat rá. Azt már tudjuk, hogy a *cián* téglalap feleakkora,



***2. ábra.** A felezéssel kapott téglalap hasonló*

mint a *sárga*. De vajon mekkora a nagyítás (kicsinyítés) mértéke? Az *a* oldal hányszorosa a *b/2* oldalnak, illetve hányad része a *b* oldalnak? A válasz azért érdekes, mert a nagyítás mértéke megegyezik a téglalapok oldalainak arányával! Az *a* egyrészt a sárga téglalap rövidebb oldala (b/nagyítás), másrészt a cián téglalap hosszabb oldala (b/2× nagyítás).

Ha abból a feltételből indulunk ki, hogy a hosszabbik oldal *(b)* felezésével hasonló téglalapot kapunk (1–2. ábra), akkor igaz az alábbi egyenlet:

$$a : b = \frac{b}{2} : a$$

$$a^2 = \frac{b^2}{2}$$

$$a = \frac{b}{\sqrt{2}}\,(\text{sárga}) = \sqrt{2}\,\frac{b}{2}\,(\text{cián})$$

$$b = \sqrt{2}a$$

A fentiek az alábbiakat jelentik:

a) A hosszabbik oldal-szer nagyobb, mint a rövidebb oldal (3. ábra).

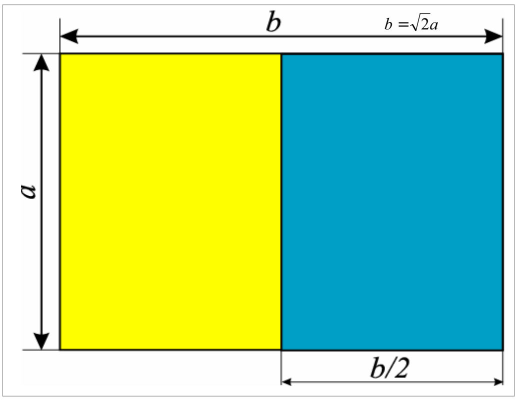
b) Ahhoz, hogy a téglalap területe a duplája legyen, a nagyítás mértékének-t kell választani!

Megjegyzés:
A fényképezőgép blendeértékei négyzetgyök kettő többszörösei (5. ábra):
1,4, 2, 2,8, 4, 5,6, 8, 11, 16, 22 stb., sorra felezik az áteresztett fény mennyiségét.

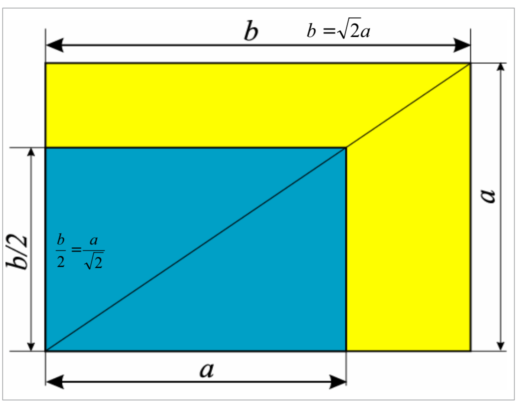
c) Ha a nagyítás mértéke sorra $\sqrt{2}$, akkor az oldalak méretei mértani sort hoznak létre:

$$\frac{a}{2},\ \frac{a}{\sqrt{2}},\ a,\ \sqrt{2}a,\ 2a,\ 2\sqrt{2}a,\ 4a$$

stb. (6. ábra).



3. ábra. *Az oldalak aránya*

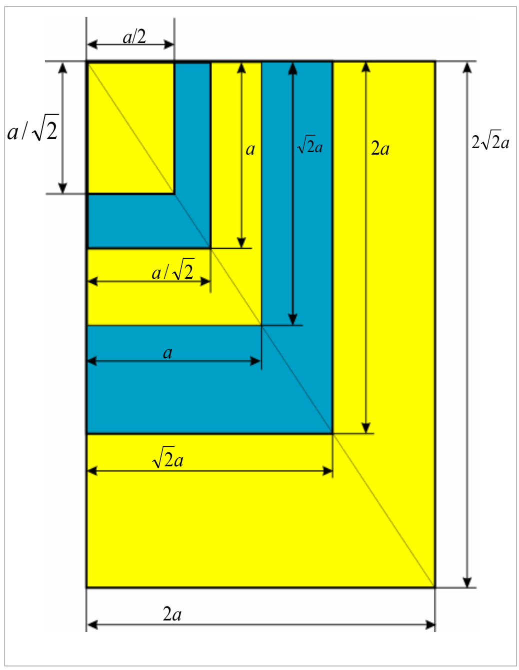


4. ábra. *A nagyítás mértéke*

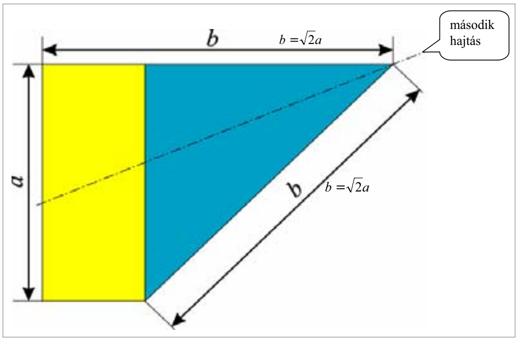
5. ábra. *Blendeértékek az objektíven*

d) Ha azt szeretnénk, hogy a téglalap területe $\sqrt{2}$-szeres legyen, akkor a nagyítás mértékének $\sqrt[4]{2}$-t kell választani!

Általánosságban elmondható, hogy a nagyítás mértékével négyzetesen változik a téglalap területe. Néhány példa:



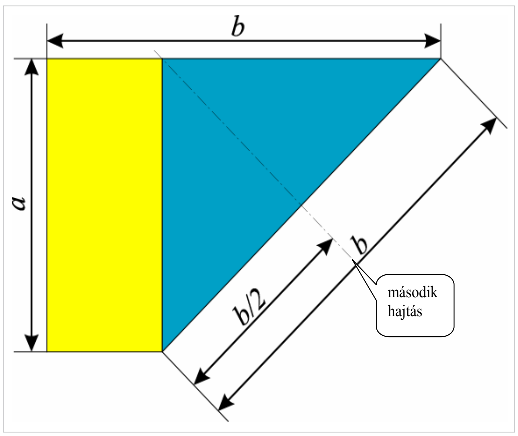
6. ábra. *Az oldalak hossza mértani sor szerint növekszik*



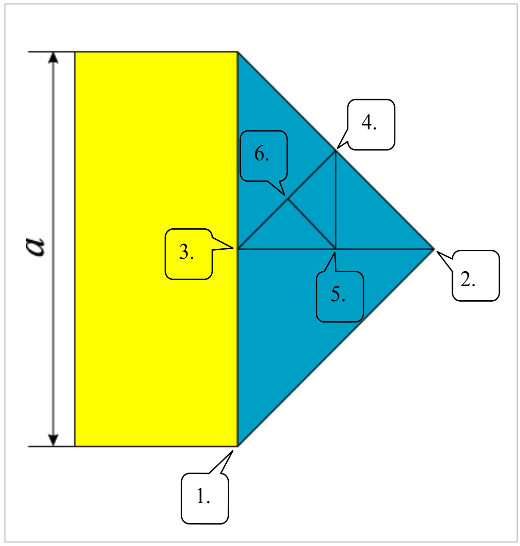
7. ábra. *A négyzet átlójának mérete*

nagyítás 4-szeres, a területe 16-szoros
nagyítás 2-szeres, a területe 4-szeres
nagyítás √2-szörös, a területe 2-szeres
nagyítás ⁴√2-szörös, a területe √2-szörös

e) A négyzet átlója √2-szer nagyobb, mint a négyzet oldala. Erről két hajtással könnyen meggyőződhetünk (7. ábra).



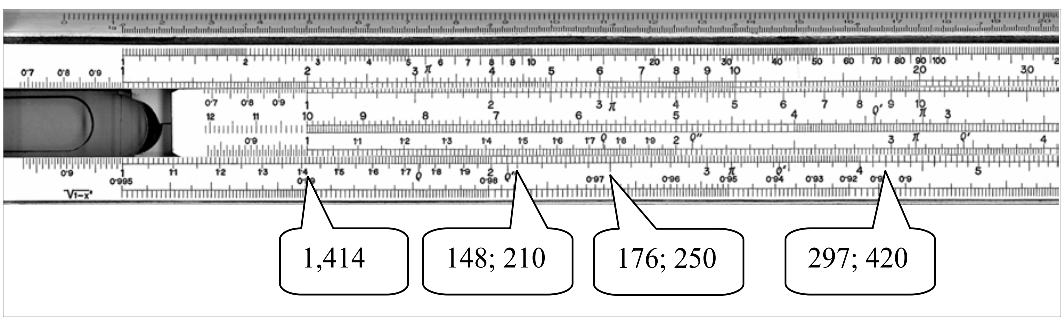
8. ábra. *Az átfogó félbehajtásával kapott további méret*



9. ábra. *Az átfogók félbehajtásával kapott további méretek*

f) A négyzet átlója megegyezik az ív hosszabbik oldalával (7. ábra), ezért az átló felezésével kapott méret megegyezik a hosszabbik oldal felezésével kapott mérettel. A hajtás elvégzése után egy olyan derékszögű háromszöget kapunk, amelyiknek a befogói megegyeznek a felezéssel kapott ív rövidebb oldalával (*b*/2), az átfogója pedig a hosszabbik oldalával (*a*). Továbbiakban az átfogók felezésével juthatunk el a kisebb méretekig. Ezzel a módszerrel mindig csak két lapot hajtunk, ezért nem jelentkezik sem a ráncosodás, sem pedig a legyezősödés (8–9. ábra). Tessék kipróbálni egy A/4-es papírral!

g) A hosszabbik oldal és a rövidebb oldal hányadosa √2. Ha a logarlécet az alábbiak szerint állítjuk be, akkor a rövidebb oldal mérete alatt leolvashatjuk a hosszabbik oldalt (10. ábra).



10. ábra. *Logarléc használata (az oldalak arányának bemutatása)*

$$a \times \sqrt{2}a = 1$$
$$\sqrt{2}\, a^2 = 1$$
$$a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

a = 0,84089641525371454303112547623321 m

$b = 1/a$ = 1,1892071150027210667174999705605 m

2. „A" méretsorozat

A kiinduló méret területe 1 m².
$a \times b$ = 1 m²
A 2–3. ábránál láttuk – és le is vezettük –, hogy a hosszabbik oldal √2-szer nagyobb, mint a rövidebb oldal *(b=√2a)*.
A fenti értékeket átszámolva **mm**-re és **kerekítve**, azt kapjuk, hogy az „A" sorozat kiinduló mérete 841×1189 mm.
A további méreteket – mm-es pontossággal – a hosszabbik oldal felezésével és szükség esetén **lefelé** történő kerekítéssel kapjuk.

A/0 841×1189 mm
A/1 594×841 mm (nem 594,5)
A/2 420×594 mm (nem 420,5)
A/3 297×420 mm
A/4 210×297 mm
A/5 148×210 mm

A szám azt jelzi, hogy a kiinduló méretet hányszor feleztük. Ebből ki tudjuk számolni a részek számát. Pl.: A/4, négyszer feleztünk: $2^4 = 16$

Számolással azt is megtudhatjuk, hogy pl. A/1-es ív hány darab A/5-ös méretű ívet ad ki.
$2^{5-1} = 2^4 = 16$

Korábban szó volt arról, hogy az oldalak mértani sor szerint növekednek.

Pl.: 148, 210, 297 mm. A mértani sorra az jellemző, hogy a két szélső tag szorzata (148×297) megegyezik a középső tag négyzetével (210²). A logarléc négyzetskáláján ábrázolva a két szélső szám szorzatát, az alapskálán leolvashatjuk a középső értéket (11. ábra).

3. „B" méretsorozat

A kiinduló méret rövidebb oldala *(a)* 1 m.
A „B" méretsorozatra is igaz, hogy a hosszabbik oldal √2-szer nagyobb, mint a rövidebb oldal *(b=√2a)*.
√2 = 1,4142135623730950488016887242097

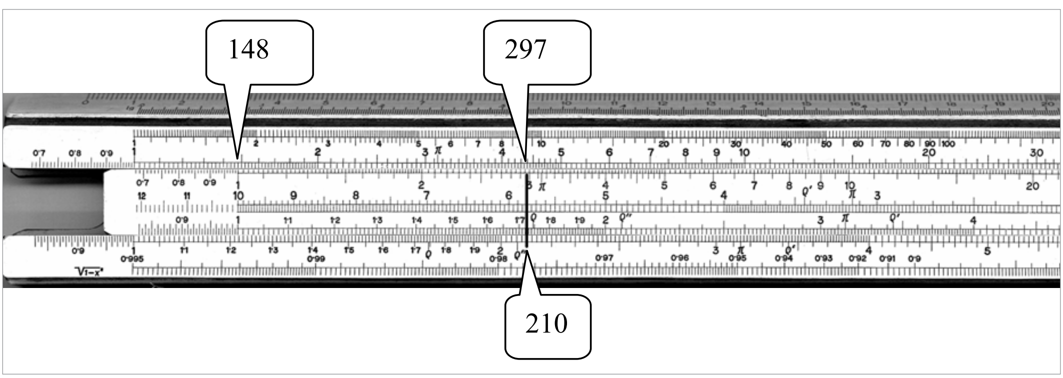
A fenti értékeket átszámolva **mm**-re és **kerekítve**, azt kapjuk, hogy a „B" sorozat kiinduló mérete 1000×1414 mm.

A további méreteket – mm-es pontossággal – a hosszabbik oldal felezésével és szükség esetén **lefelé** történő kerekítéssel kapjuk.

B/0 1000×1414 mm
B/1 707×1000 mm
B/2 500×707 mm
B/3 353×500 mm (nem 353,5)
B/4 250×353 mm
B/5 176×250 mm (nem 176,5)

4. Összefüggés az „A" és a „B" méretsorozat között

a) Mind a két méretsorozatnál a rövidebb oldal úgy aránylik a hosszabbik oldalhoz, mint 1:√2-höz. Az A/0-ás papír mérete 841×1189 mm. Az B/0-ás



11. ábra. *Logarléc használata (mértani sor)* papír mérete 1000×1414 mm. 1,189 nem más, mint $\sqrt[4]{2}$ három tizedes pontossággal.

1,414 a $\sqrt{2}$ három tizedes pontossággal. Az eddigiekből az következik, hogy ha az A/0-ás papír méreteit megszorozzuk $\sqrt[4]{2}$-vel, akkor a B/0-ás papír méreteit kapjuk meg. Az A/5, B/5, A/4, B/4, A/3, B/3 stb. méretek megfelelő oldalainál a nagyítás mértéke sorra $\sqrt[4]{2}$.

b) Az A/5, B/5, A/4, B/4, A/3, B/3 stb. méretek területei sorra $\sqrt{2}$-szeresen növekednek.

c) Az A/0-ás papír hosszabbik oldalának négyzete (1189^2) megegyezik a B/0-ás papír területével (1000×1414).

d) A B/1-es papír hosszabbik oldalának négyzete (1000^2) megegyezik az A/0-ás papír területével.

e) A *c)* és *d)* pontban szereplők általánosíthatóak, pl.: az A/5-ös papír hosszabbik oldalának négyzete (210^2) megegyezik a B/5-ös papír területével (176×250). A számolással kapott különbség a méretszámok kerekítéseiből adódik!

f) A *c), d)* és az *e)* pontban szereplők alapján A/6-os ívekből könnyedén tudunk kirakni a B/6-os ívvel azonos felületet, B/6-os ívekből az A/5-ös ív méretével egyenlőt stb. egészen B/0-ig. Általánosságban elmondható, hogy $a \times \sqrt{2}a = \sqrt[4]{2}a \times \sqrt[4]{2}a$ (12. ábra).

5. Négyzetes és keskeny formátumok

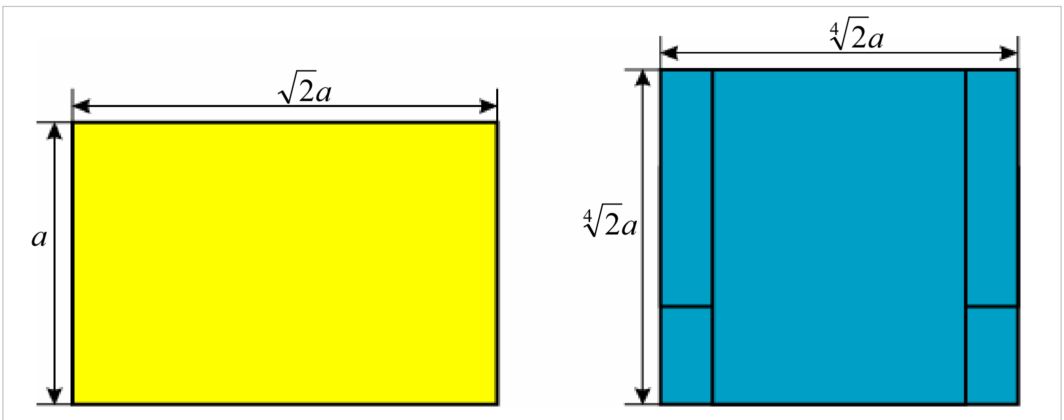
Eddig olyan papírméretekkel foglalkoztunk, amelyeket A/0 vagy a B/0 méretekből kiindulva a hosszabbik oldal felezésével tudunk levezetni. A betűjelzés utal a kiinduló méretre, a számadat a felezések számát jelöli. Az eddigi papírméretekre az jellemző, hogy felezések útján hasonló (azonos oldalarányú) téglalapot kapunk. Az A/0 és a B/0 méreteket másféleképpen is feloszthatjuk:

a) AN20
Az első betű a sorozat jelére utal. Az N négyzetes formátumot jelöl (az oldalak aránya: 1:1,13). 20 a kapott ívek darabszámát mutatja. Az AN20 mérete 210×237 mm. Ezt úgy kapjuk meg, hogy az A/0 rövidebb oldalát 4-gyel osztjuk (841/4 = 210) és a hosszabbik oldalát 5-tel (1189/5 = 237). Összehasonlításképpen az A/4 mérete 210×297 mm. Azonos a szélességi méret (210 mm), a magassági méret kisebb, mint az A/4-esé.

b) AK40
Keskeny formátumú (az oldalak aránya: 1:1,78). Az AN20-nak a fele. Mérete 118×210 mm. A magassági mérete megegyezik az A/5 magassági méretével (210 mm), a szélességi mérete kisebb. Egy A/0-ás ívből 40 db AK40-es ívet vághatunk ki.

c) BN20
B/1 méretből származtatott négyzetes formátumú papíralak. Az oldalak aránya: 1:1,13, ami megegyezik az AN20 oldalainak arányával. A BN20 mérete 176×200 mm. Ezt úgy kapjuk meg, hogy a B/1 rövidebb oldalát 4-gyel osztjuk (700/4 = 176) és a hosszabbik oldalát 5-tel (1000/5 = 200). Összehasonlításképpen a B/5 mérete 176×250 mm. Azonos a szélességi méret (176 mm), a magassági méret kisebb, mint a B/5-é.

d) BK40
Keskeny formátumú (az oldalak aránya: 1:1,77). A BN20-nak a fele. Mérete 100×176 mm. A magas-



12. ábra. *Az ív méretével azonos nagyságú négyzet kirakása* sági mérete megegyezik a B/6 magassági méretével (176 mm), a szélességi mérete kisebb. Egy B/1-es ív 40 db BK40-es ívet ad ki.

6. Francia sorozat

Jelölés	Méret (mm)	
Fr/0	780×1040	(az oldalak aránya: 1:1,33)
Fr/1	520×780	(az oldalak aránya: 1:1,50)
Fr/2	390×520	(az oldalak aránya: 1:1,33)
Fr/3	260×390	(az oldalak aránya: 1:1,50)
Fr/4	195×260	(az oldalak aránya: 1:1,33)
Fr/5	130×195	(az oldalak aránya: 1:1,50)
Fr/6	97×130	(az oldalak aránya: 1:1,33)

„A" és „B" sorozat oldalarányai és 3:5 arányban meghatározott aranymetszeti vonala.
Papírméret, ahol az oldalak aránya aranymetszeti (a×1,6180a). Aranymetszeti vonala négyzetet jelöl ki (a×a). 0,6180a, a és 1,6180a mértani sor, a szorzószám 1,6180.

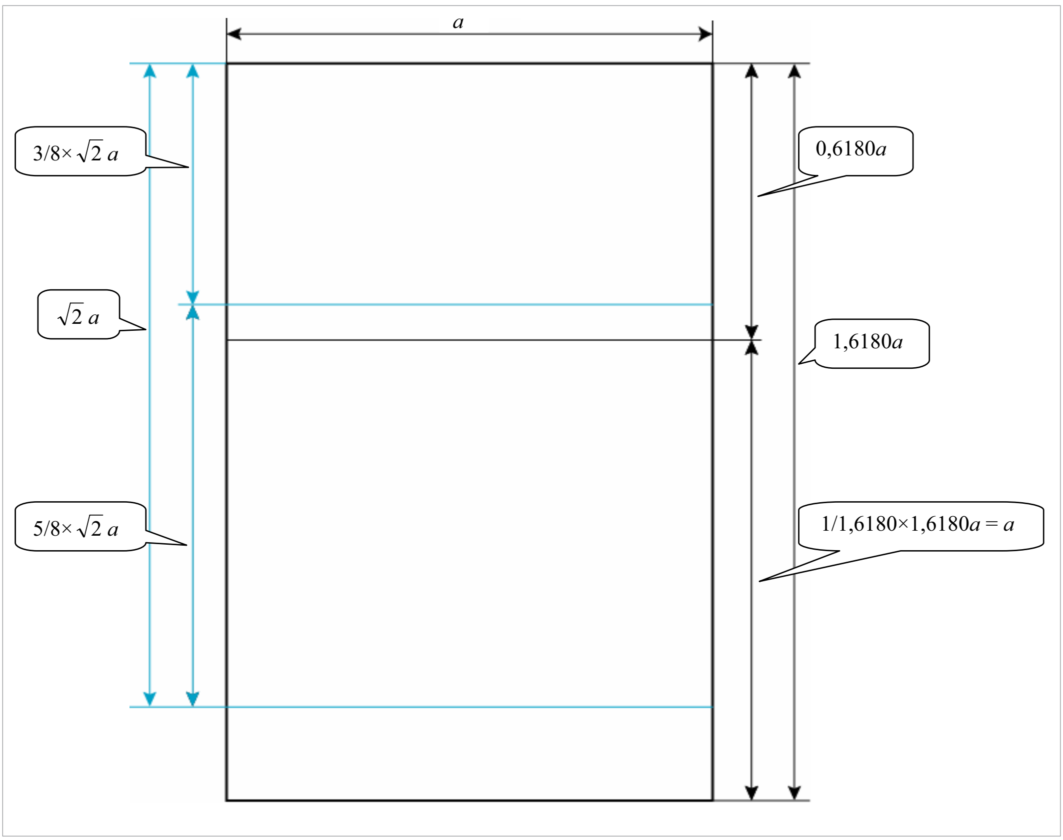
7. Aranymetszeti arányok

Az aranymetszeti arány viszonyszáma (4 tizedes pontossággal) 1:1,6180. A 3, 5, 8 számsor az emberi érzékelés számára kedvező, kellemes hatást jelent. Egy szakaszt úgy osztunk két részre, hogy a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbik részhez, mint a nagyobb az egészhez (13. ábra).

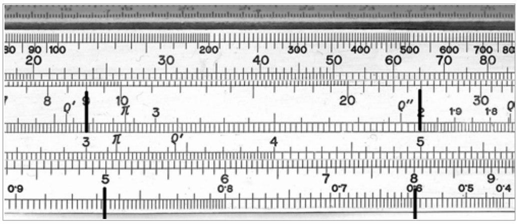
Ha az aranymetszeti oldalarányú papír hoszszabbik oldalát megfelezzük, akkor 1:1,236 oldalarányú papírt kapunk.

A 3:5 = 5:8, csak megközelítőleg igaz, de azért a gyakorlatban jól használható (14. ábra).

Az aranymetszeti arányszám pontos értékét a Lamé-számsor alkalmazásával határozhatjuk meg. 2+3 = 5, 3+5 = 8, 5+8 = 13, 8+13 = 21, 13+21 = 34 stb.
2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 stb.



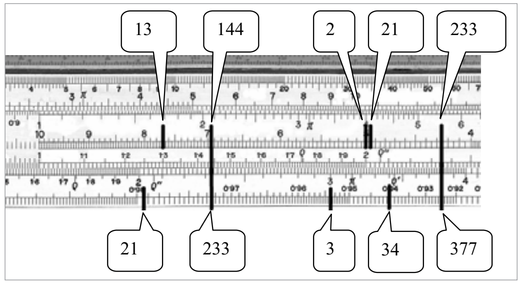
***13. ábra.** Különböző oldalarányú papírok az aranymetszeti vonal jelölésével*



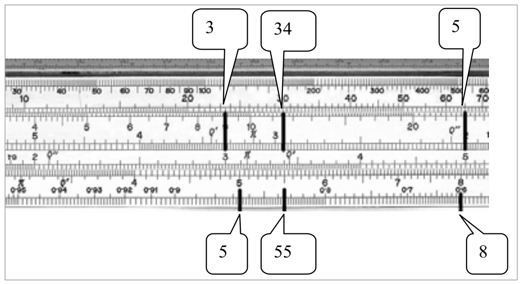
__14. ábra.__ Különbség az arányok között

2:3 = 1:1,5000		(14. ábra)
3:5 = 1:1,6666		(15. ábra)
5:8 = 1:1,6000		(15. ábra)
8:13 = 1:1,6250		
13:21 = 1:1,6153		(14. ábra)
21:34 = 1:1,6190		(14. ábra)
34:55 = 1:1,6176		(15. ábra)
55:89 = 1:1,6181		
89:144 = 1:1,6179		
144:233 = **1:1,6180**		(14. ábra)
233:377 = **1:1,6180**		(14. ábra)

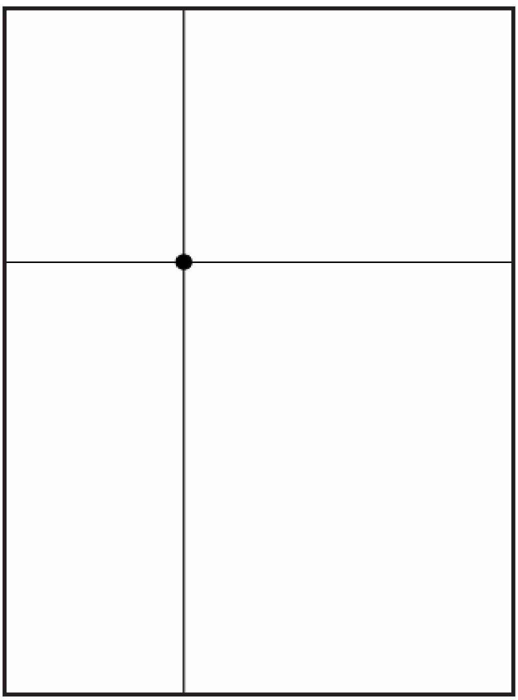
A Lamé-számsor ábrázolásánál látható (15–16. ábra), hogy az eltérés sorra egyszer kisebb, egyszer nagyobb az aranymetszeti arányszámnál, de mindjobban megközelíti azt. A 2:3 lefelé, a 3:5 fölfelé, az 5:8 arány lefelé tér el stb. Az aranymetszeti arányszám (4 tizedes pontossággal) 1:1,6180.



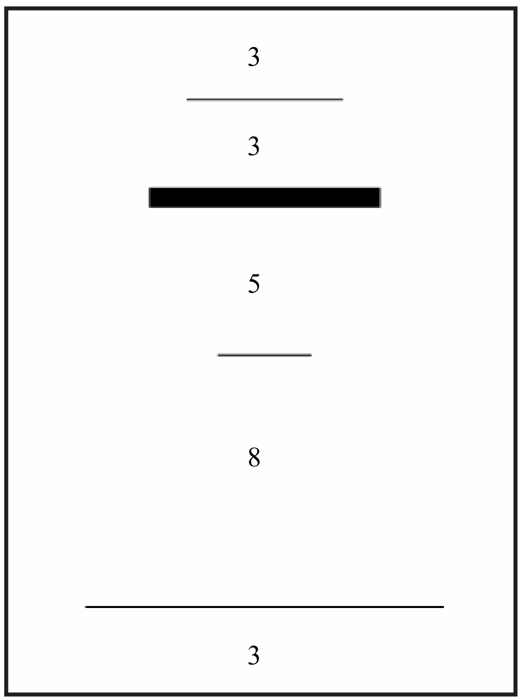
__15. ábra.__ Különbség az arányok között



__16. ábra.__ Különbség az arányok között



__17. ábra.__ Aranymetszeti pont



__18. ábra.__ Címoldal sorai közötti térelosztás

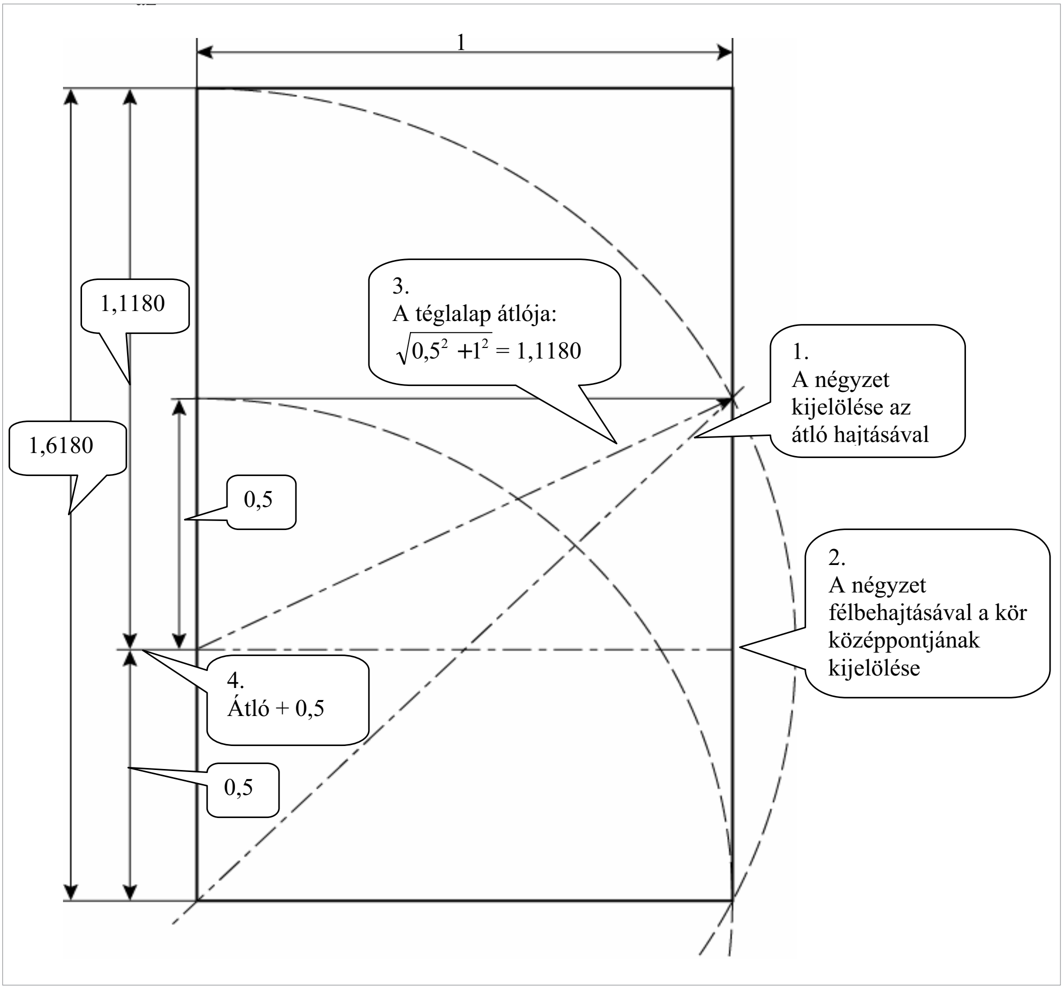
Megjegyzés:
Aranymetszeti arányokat használunk a tipográfiában is. Néhány példa:
aranymetszeti vonal (13. ábra),
aranymetszeti pont (17. ábra),
címoldal (18. ábra).

Aranymetszeti oldalarányok meghatározása szerkesztéssel (19. ábra) és hajtogatással.
Hajtogatással az alábbiak szerint győződhetünk meg arról, hogy a papír oldalainak aránya aranymetszeti:

1. átló hajtásával a szélességi méretet felmérjük a hosszabbik oldalra,
2. félbe hajtjuk a négyzetet,
3. a kapott téglalap átlója 1,1180 ($\sqrt{0{,}5^2+1^2}$),
4. az átló hosszához hozzáadunk 0,5-et, – a négyzet oldalának a felét –, ezzel megkapjuk az aranymetszeti arányszámot (1,1180+0,5= **1,6180**).

8. Vágott méretek

A papírméretek oldalarányai nem aranymetszetiek. A könyvtest vágásával az arány tovább romlik, hiszen szélességben csak egy vágás van (elöl), magasságban kettő (fejnél és lábnál). Az alábbiakban összeállítás látható a könyvtestek vágott méreteiről és oldalaiknak arányáról.



19. ábra. *A szerkesztés menete*

méret (mm)	vágott méret (mm)	oldalak aránya	
A/4	210×297	202 –2×285 –2	1:1,411
AN20	210×237	202 –2×226 –2	1:1,119
A/5	148×210	142 –2×197 –2	1:1,387
AK40	118×210	112 –2×197 –2	1:1,759
A/6	105×148	98 –2×137 –2	1:1,398
B/4	250×353	243 –2×336 –2	1:1,383
B/5	176×250	168 –2×238 –2	1:1,417
BN20	176×200	168 –2×188 –2	1:1,119
B/6	125×176	119 –2×163 –2	1:1,370
BK40	100×176	94 –2×163 –2	1:1,734
Fr/4	195×260	188 –2×248 –2	1:1,319
Fr/5	130×195	124 –2×183 –2	1:1,476
Fr/6	97×130	92 –2×122 –2	1:1,326